

УДК 517.97

**ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРАВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ  
КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ  
С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ****Г.Ф.КУЛИЕВ\*, Г.Г.ИСМАЙЛОВА\*\*****\*Бакинский Государственный Университет****\*\*Сумгаитский Государственный Университет****hkuliyev@rambler.ru****gunay\_ismayilova\_83@mail.ru**

*В работе рассматривается задача определения правой части уравнения колебаний струны с нелокальными краевыми условиями. Эта задача приводится к задаче минимизации некоторого функционала, построенного с помощью дополнительной информации. Для новой задачи выводится необходимое и достаточное условие оптимальности.*

**Ключевые слова:** обратная задача, уравнение колебаний, нелокальные условия, условие оптимальности

В последнее время обратные задачи для дифференциальных уравнений интенсивно изучаются. Отметим, что такие задачи возникают в самых разнообразных областях математики, геофизики, сейсмологии, астрономии, экологии и т.д. [1]. Появляются новые постановки обратных задач, развивается теория решения таких задач, создаются численные алгоритмы и их практическая реализация. В данной работе предлагается подход к решению одной обратной задачи для уравнения колебаний струны и поиск неизвестной правой части уравнения сводится к задаче минимизации функционала, построенного с помощью дополнительной информации, получается градиент функционала и выводится необходимое и достаточное условие оптимальности.

**Постановка задачи.**

В области  $Q_T = \{(x,t) / 0 < x < l, 0 < t < T\}$  рассматривается краевая задача:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) = u_x(l, t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Здесь  $u_0(x) \in W_2^1(0, l)$ ,  $u_1(x) \in L_2(0, l)$  – заданные функции, а  $v(x, t) \in L_2(Q_T)$  – неизвестная функция. Для того чтобы определить  $v(x, t)$ , мы воспользуемся дополнительной информацией

$$u(x_0, t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где  $\varphi(t) \in L_2(0, T)$  – заданная функция,  $x_0 \in (0, l)$  – заданная точка.

Мы приводим эту задачу к задаче оптимального управления, т.е. на решениях задачи (1)-(3) минимизируем функционал

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T [u(x_0, t; v) - \varphi(t)]^2 dt, \quad (5)$$

где  $u(x, t; v)$  – является решением задачи (1)-(3), которое соответствует функцию  $v(x, t)$ . Функцию  $v(x, t)$  назовем управлением. Если мы найдем управление  $v(x, t)$ , которое доставляет функционалу (5) нулевое значение, тогда дополнительное условие (4) выполняется.

Отметим, что при каждом фиксированном управлении  $v(x, t)$  краевая задача (1)-(3) имеет единственное обобщенное решение из  $W_2^1(Q_T)$  [2].

### О разрешимости задачи (1)-(3), (5).

Теперь рассмотрим задачу: при каких условиях

$$\inf_{v \in L_2(Q_T)} J(v) = 0 \quad ? \quad (6)$$

Пусть  $\psi_0(t)$  – заданная функция из  $L_2(0, T)$  такая, что

$$\int_0^T \psi_0(t) u(x_0, t; v) dt = 0, \quad \forall v \in L_2(Q_T). \quad (7)$$

Мы хотим выяснить будет ли отсюда следовать, что  $\psi_0(t) \equiv 0$ .

Введем функцию  $W(x, t)$  – как решение задачи

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \psi_0(t) \delta(x - x_0), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (8)$$

$$W(x, T) = 0, \quad \frac{\partial W(x, T)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (9)$$

$$W_x(l, t) = 0, \quad W(0, t) = W(l, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (10)$$

где  $\delta(x)$  – функция Дирака.

Как в работе [3] можно показать, что задача (8)-(10) имеет единственное обобщенное решение из класса  $W_2^1(Q_T)$  и это решение обладает свойствами

$$W(x,t) \in C([0,T]; W_2^1(0,l)), \quad \frac{\partial W}{\partial t}(x,t) \in C([0,T]; L_2(0,l)).$$

В силу определения обобщенного решения задачи (1)-(3) имеем: при  $t = 0$  выполняется условие  $u(x,0) = u_0(x)$  и интегральное тождество

$$\iint_{Q_T} \left( -\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) dxdt - \int_0^l u_1(x)\eta(x,0)dx = \iint_{Q_T} v(x,t)\eta(x,t)dxdt \quad (11)$$

для любой функций  $\eta \in W_2^1(Q_T)$ ,  $\eta(x,T) = 0, \eta(0,t) = \eta(l,t)$ .

А силу определения обобщенного решения задачи (8)-(10) имеем: при  $t = T$  выполняется условие  $W(x,T) = 0$  и интегральное тождество

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \left( -\frac{\partial W}{\partial t} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} \right) dxdt - \int_0^l \frac{\partial W(x,0)}{\partial t} g(x,0)dx = \\ = \int_0^T \psi_0(t)g(x_0,t)dt, \end{aligned} \quad (12)$$

для любой функции  $g \in W_2^1(Q_T)$ ,  $g(0,t) = 0$ .

Теперь в (11) за функцию  $\eta$  возьмем  $W$ , а в (12) за функцию  $g$  возьмем  $u$ , из (11) вычтем (12), тогда имеем:

$$\int_0^l \frac{\partial W(x,0)}{\partial t} u_0(x)dx - \int_0^l u_1(x)W(x,0)dx - \iint_{Q_T} vWdxdt + \int_0^T \psi_0(t)u(x_0,t;v)dt = 0.$$

Если учесть условия (7), отсюда следует

$$\int_0^l \frac{\partial W(x,0)}{\partial t} u_0(x)dx - \int_0^l u_1(x)W(x,0)dx - \iint_{Q_T} v(x,t)W(x,t)dxdt = 0. \quad (13)$$

Если соотношение (13) записать для произвольных  $v_1(x,t)$  и  $v_2(x,t)$ , из полученных двух равенств следует, что

$$\iint_{Q_T} (v_1 - v_2)Wdxdt = 0, \quad \forall v_1, v_2 \in L_2(Q_T).$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что  $W(x,t) \equiv 0$  почти всюду в  $Q_T$ . Поскольку  $W(x,t) \in C(\overline{Q_T})$ , тогда всюду в  $Q_T$   $W(x,t) \equiv 0$ . Значит в силу (8)  $\psi_0(t) \equiv 0$ .

Таким образом, в силу теоремы Хана-Банаха [4] мы получаем, что

$$\inf_{v \in L_2(Q_T)} J(v) = 0.$$

Если образ  $L_2(Q_T)$  при отображении  $v \rightarrow u(x_0,t;v)$  замкнут в  $L_2(Q_T)$ , то возможно существует такой элемент  $v_0(x,t) \in L_2(Q_T)$ , что

$$\min_{v \in L_2(Q_T)} J(v) = J(v_0) = 0.$$

**Вычисление дифференциала функционала (5) и необходимое условие оптимальности**

Теперь покажем, что функционал (5) дифференцируем в  $L_2(Q_T)$ .

Берем два допустимых управления  $v, v + \delta v$ . Соответствующие решения задачи (1)-(3) обозначим через  $u(x, t; v)$  и  $u(x, t; v + \delta v)$ .

Пусть  $\delta u(x, t) = u(x, t; v + \delta v) - u(x, t; v)$ . Ясно, что  $\delta u(x, t)$  является обобщенным решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} = \delta v, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (14)$$

$$\delta u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \delta u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (15)$$

$$\delta u(0, t) = 0, \quad \delta u_x(0, t) = \delta u_x(l, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (16)$$

т.е. для любой функции  $\eta(x, t) \in W_2^1(Q_T)$ ,  $\eta(x, T) = 0$ ,  $\eta(0, t) = \eta(l, t)$  выполняется интегральное тождество

$$\iint_{Q_T} \left( -\frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \delta u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) dx dt - \iint_{Q_T} \delta v \eta dx dt = 0. \quad (17)$$

Пусть  $\psi$  – обобщенное решение из  $W_2^1(Q_T)$  сопряженной задачи

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = (u(x, t; v) - \varphi(t)) \delta(x - x_0), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (18)$$

$$\psi(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, T)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (19)$$

$$\psi_x(l, t) = 0, \quad \psi(0, t) = \psi(l, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (20)$$

т.е. для любой функции  $g \in W_2^1(Q_T)$ ,  $g(0, t) = 0$  выполняется интегральное тождество

$$\iint_{Q_T} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx dt - \int_0^l \frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial t} g(x, 0) dx - \int_0^T [u(x_0, t; v) - \varphi(t)] g(x_0, t) dt = 0. \quad (21)$$

Теперь вычислим приращение функционала (5).

Ясно, что

$$\begin{aligned} \delta J(v) &= \delta J(v + \delta v) - J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ [u(x_0, t; v) + \delta u(x_0, t) - \varphi(t)]^2 - \right. \\ &\left. - [u(x_0, t; v) - \varphi(t)]^2 \right\} dt = \int_0^T [u(x_0, t; v) - \varphi(t)] \delta u(x_0, t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T |\delta u(x_0, t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Если в (17) положить  $\eta(x, t) = \psi(x, t)$ , а в (21)  $g(x, t) = \delta u(x, t)$  и вычесть полученные соотношения, то имеем

$$\int_0^T [u(x_0, t; v) - \varphi(t)] \delta u(x_0, t) dt = \iint_{Q_T} \delta v \psi dx dt.$$

Тогда, учитывая это равенство в (22), получим

$$\delta J(v) = \iint_{Q_T} \delta v \psi dx dt + R, \quad (23)$$

где

$$R = \frac{1}{2} \int_0^T |\delta u(x_0, t)|^2 dt.$$

Теперь оценим остаточный член  $R$ , входящий в (23). Покажем, что

$$|R| \leq c \iint_{Q_T} |\delta v|^2 dx dt. \quad (24)$$

Для этого покажем, что

$$\|\delta u(x, t)\|_{W_2^1(Q_T)}^2 \leq c \|\delta v\|_{L_2(Q_T)}^2. \quad (25)$$

Применяя метод Фурье, для решения задачи (14)-(16) получаем представление

$$\delta u(x, t) = \int_0^t \int_0^1 G(x, s, t - \tau) \delta v(s, \tau) ds d\tau, \quad (26)$$

где

$$G(x, s, t) = tX_0(x)Y_0(s) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t Y_{2k}(s) + \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} t \cos \sqrt{\lambda_k} t - \frac{1}{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right) Y_{2k-1}(s) \right] X_{2k}(x) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \cdot Y_{2k-1}(s) X_{2k-1}(x) \right].$$

Тогда

$$\delta u(x, t) = \left( \int_0^t (t - \tau) \delta v_0(\tau) d\tau \right) X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \delta v_{2k}(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k} (t - \tau) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} (t - \tau) \cos \sqrt{\lambda_k} (t - \tau) - \frac{1}{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k} (t - \tau) \right) \delta v_{2k-1}(\tau) \right) d\tau \right\} X_{2k}(x) + \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t \delta v_{2k-1}(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k} (t - \tau) d\tau \right) X_{2k-1}(x).$$

Здесь

$$\delta v_0(t) = \int_0^1 \delta v(x, t) Y_0(x) dx, \quad \delta v_{2k}(t) = \int_0^1 \delta v(x, t) Y_{2k}(x) dx, \quad \delta v_{2k-1}(t) = \int_0^1 \delta v(x, t) Y_{2k-1}(x) dx,$$

а

$$X_0(x) = x, \quad X_{2k-1}(x) = x \cos \sqrt{\lambda_k} x, \quad X_{2k}(x) = \sin \sqrt{\lambda_k} x, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\lambda_k = (2\pi k)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

система собственных и присоединенных функций и собственных значений спектральной задачи

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(0) = X'(1). \quad (27)$$

Отметим, что присоединенная функция  $z_k(x)$ , отвечающая  $\lambda_k$  и собственной функции  $X_k(x)$  определяется как решение задачи:

$$z'' + \lambda_k z = -2\sqrt{\lambda_k} X_k(x), \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = z'(1)$$

и

$$z_k(x) = x \cos \sqrt{\lambda_k} x, \quad k=1, 2, \dots$$

Краевая задача (27) не является самосопряженной. Сопряженная к ней будет задача

$$Y''(x) + \lambda Y(x) = 0, \quad Y'(1) = 0, \quad Y(0) = Y(1). \quad (28)$$

Задача (28) имеет собственные числа  $\lambda_k(x) = (2\pi k)^2, k = 0, 1, 2, \dots$  собственные и присоединение функции

$$Y_0(x) = 2, \quad Y_{2k-1}(x) = 4 \cos \sqrt{\lambda_k} x, \quad Y_{2k}(x) = 4(1-x) \sin \sqrt{\lambda_k} x.$$

Следуя работе [2], из (26) следует, что

$$\|\delta u\|_{W_2^1(Q)}^2 \leq c \|\delta v\|_{L_2(Q)}^2.$$

По теореме вложения  $W_2^1(Q_T) \subset L_2(0, T)$  [5, стр.70] получаем, что

$$\|\delta u(x_0, t)\|_{L_2(0, T)}^2 \leq c \|\delta u(x, t)\|_{W_2^1(Q_T)}^2. \quad (29)$$

Сопоставляя соотношения (25) и (29) имеем

$$\|\delta u(x_0, t)\|_{L_2(0, T)}^2 \leq c \|\delta v\|_{L_2(Q_T)}^2.$$

Отсюда следует справедливость оценки (24). Таким образом,

$$|R| = \frac{1}{2} \int_0^T |\delta u(x_0, t)|^2 dt \leq c \|\delta v\|_{L_2(Q_T)}^2.$$

Тогда из равенства (23) и из оценки (24) следует, что функционал  $J(v)$  дифференцируем в  $L_2(Q_T)$  и его дифференциал и градиент определяются выражениями

$$\langle J'(v), \delta v \rangle_{L_2(Q_T)} = \iint_{Q_T} \psi(x, t; v) \delta v(x, t) dx dt \quad (30)$$

и

$$J'(v) = \psi(x, t; v), \quad (31)$$

соответственно.

**Теорема.** Пусть выполняются вышеназванные условия на данные задачи (1)-(4). Тогда для оптимальности управления  $v_* = v_*(x, t) \in L_2(Q_T)$  в задаче (1)-(3),(5) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\psi_*(x, t) = 0, \quad (32)$$

для всех  $(x, t) \in Q_T$ , где  $\psi_*(x, t)$  – решения сопряженной задачи (18)-(20) при  $v = v_*(x, t)$ .

**Доказательство.** Согласно доказанным утверждениям, функционал  $J(v)$  дифференцируем по Фреше на  $L_2(Q_T)$  и его дифференциал в точке  $v(x, t)$  определяется равенством (30). В силу теоремы [6] на элементе  $v_* \in L_2(Q_T)$  необходимо и достаточно выполнения равенства

$$J'(v_*) = 0.$$

Отсюда и из (31) следует справедливость равенства (32). Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2009, 457 с.
2. Гасанов К.К., Гасымов Т.М. Об управляемости для волнового уравнения с неклассическими краевыми условиями. Вестник Бакинского Университета, 2009, №4, с.19-23.
3. Кулиев Г.Ф. Задача точечного управления для гиперболического уравнения. Автоматика и телемеханика, 1993, №3, с.80-84.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981, 543 с.
5. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.
6. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002, 824 с.

#### QEYRİ-LOKAL ŞƏRTLİ SİMİN RƏQSLƏRİ TƏNLIYİNİN SAĞ TƏRƏFİNİN TAPILMASI

H.F.QULIYEV, G.Q.İSMAYILOV

#### XÜLASƏ

İşdə qeyri-lokal şərtlərlə verilmiş simin rəqsləri tənliyin sağ tərəfinin təyini məsələsinə baxılır. Bu məsələ əlavə informasiyanın köməyi ilə qurulmuş müəyyən funksionalın minimallaşdırılması məsələsinə gətirilir. Yeni məsələ üçün optimallığın zəruri və kafi şərti çıxarılır.

**Açar sözlər:** tərs məsələ, rəqslər tənliyi, qeyri-lokal şərtlər, optimallıq şərti

#### ON THE DETERMINATION OF THE RIGHT HAND SIDE OF THE STRING OSCILLATIONS EQUATION WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

H.F.GULIYEV, G.G.ISMAYILOV

#### SUMMARY

The paper considers the problem of determination of right hand side of the string oscillations equation with nonlocal boundary conditions. This problem is reduced to the problem of minimization of some functional, constructed by means of the additional information. For the new problem, necessary and sufficient conditions of optimality have been obtained.

**Key words:** inverse problem, oscillations equation, nonlocal conditions, optimality condition

*Поступила в редакцию: 01.07.2015 г.*

*Подписано к печати: 17.11.2015 г.*